第27卷 第4期　工 程 数 学 学 报　Vol. 27 No. 4
2010年08月　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0684-09

一类具时滞和收获的捕食模型的稳定性与Hopf分支*

田晓红， 徐　瑞， 王丽丽

(军械工程学院应用数学研究所，石家庄 050003)

摘　要: 本文研究一类具有常数收获率和时滞的捕食模型，其中时滞描述了捕食种群的妊娠期。通过分析特征方程，得到了正平衡点局部稳定的条件。当时滞τ增加时，正平衡点失去稳定性，当τ跨过临界值时系统将出现Hopf分支。应用中心流形定理和规范型理论，得到了确定Hopf分支方向和分支周期解的稳定性的计算公式。最后对所得理论结果进行了数值模拟。

关键词: 捕食系统；时滞；功能性反应；Hopf分支；稳定性

分类号: **AMS**(2000) 34K18; 34K20; 34K60; 92D25　**中图分类号**: O175.1　**文献标识码**: A

1　引言

种群生态学是生态学中的一个重要分支，也是与人们的生产生活最密不可分的学科之一。人们对种群生态学的研究，一方面要对种群的发展变化有定量的分析和预测，另一方面也是最为重要的就是建立具有收获率的种群系统，通过对系统的分析，判断出付出多大的捕获量，才可以既维持生态系统的平衡，又能使收获量达到最大，以满足人类的需要。因此对具有收获的捕食系统的研究，对生物资源进行合理的开发与利用问题具有指导作用，在经济学和生物学领域都有重要意义。目前，对于此类问题的研究已受到广泛关注，并已取得一些好的成果[1-3]。但对于含有时滞的捕食系统的研究，很少见到这方面的工作。在捕食系统中，捕食者捕食食饵后不是立即增加捕食者的数量，还需考虑捕食者应有的妊娠期，即捕食者捕食食饵后到转化为能量用于繁殖后代所需要的时间。因此，考虑妊娠期的时滞因素对系统的影响是必要的，更切合实际意义。时滞可以将种群稳定的正平衡位置变成不稳定，或出现稳定性的开关现象，而有些情况下，由于时滞的作用，系统可能会出现非常数的正周期解和Hopf分支[4-6]。

在文献[7]中，Martin和Ruan在Wangersky-Cunningham系统中加入了收获率，得到具有时滞和常数收获率的捕食-被捕食系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t)\big(r_1-ax(t)-by(t)\big)-H, \\ \dot{y}(t)=-r_2y(t)+cx(t-\tau)y(t-\tau), \end{cases} \tag{1}$$

其中bxy表示单位时间内被y个捕食者所吃掉的食饵数量。从而bx表示单位时间内每一个捕食者所吃掉的食饵数量。它除了与x有关外还反映了捕食者的捕食能力，称为捕食者对食饵的功能性反应。在系统(1)中，功能性反应被确定与食饵的数量成正比。比例系数b标志着捕食能力。食饵数量越大，被每个捕食者在单位时间内吃掉的就越多。但是，捕食者总有吃饱的时候，因此这种假定与实际情况并不完全吻合，功能性反应与食饵种群规模x的关系应该是一种包含饱和因素的函数关系。

收稿日期: 2008-11-04.　**作者简介**: 田晓红(1980年5月生)，女，讲师. 研究方向：生物数学.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10671209).

本文将考虑具有时滞和Holling-II类功能性反应的两种群捕食系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)\Big(r_1 - ax(t) - \dfrac{a_1 y(t)}{1+mx(t)}\Big) - H_1, \\ \dot{y}(t) = \dfrac{a_2 x(t-\tau)y(t-\tau)}{1+mx(t-\tau)} - r_2 y(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示食饵种群和捕食者种群在时刻 t 时的密度。参数 $a, r_1, r_2, a_1, m, H_1, \tau$ 均为正常数，τ 表示捕食者种群从幼年到成年的成熟期，而且捕食者种群只有到成年后才具有捕食能力，r_1 为食饵的内禀增长率，r_2 为捕食者的死亡率，a 为食饵的密度制约系数，H_1 为对食饵种群的常数收获率。

本文我们讨论系统 (2) 将基于以下初始条件

$$x(\theta) = \phi_1(\theta) \ge 0, \quad y(\theta) = \phi_2(\theta) \ge 0, \quad \theta \in [-\tau, 0), \quad \phi_1(0) > 0, \quad \phi_2(0) > 0,$$

其中

$$\big(\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)\big) \in C\big([-\tau, 0], R^2_{+0}\big), \quad R^2_{+0} = \big\{(x,y) : x \ge 0,\, y \ge 0\big\}.$$

本文的目的是以滞量 τ 为参数，利用Hassard等在文献 [9] 中所介绍的规范型方法，讨论系统 (2) 在正平衡点处Hopf分支的存在性以及分支方向、分支周期解的稳定性，最后通过数值模拟验证所得理论结果。

2　正平衡点的稳定性及Hopf分支的存在性

在本节中，我们将讨论系统 (2) 正平衡点的稳定性和Hopf分支的存在性。

令 $\bar{x} = ax/r_1$, $\bar{y} = a_1 y/r_1$, $\bar{t} = r_1 t$，则系统 (2) 就变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - x^2(t) - \dfrac{x(t)y(t)}{1+\gamma x(t)} - h, \\ \dot{y}(t) = \dfrac{\beta x(t-\tau)y(t-\tau)}{1+\gamma x(t-\tau)} - \alpha y(t), \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\alpha = r_2/r_1, \quad \beta = a_2/a, \quad \gamma = mr_1/a, \quad h = aH_1/r_1^2,$$

为简便起见，仍以 x, y, t 记 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$。

记 $\tilde{h} = \alpha(\beta - \alpha\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha\gamma)^2$。容易看出，当 $\tilde{h} > h$ 且 $\beta - \alpha\gamma - 2\alpha > 0$ 时，系统 (3) 存在唯一的正平衡点 $E^* = (x^*, y^*)$，其中

$$x^* = \frac{\alpha}{\beta - \alpha\gamma}, \quad y^* = \frac{\beta(\beta - \alpha\gamma - \alpha)}{(\beta - \alpha\gamma)^2} - \frac{\beta h}{\alpha}.$$

经计算可得系统 (3) 在正平衡点 E^* 的特征方程为

$$\lambda^2 + (p_1 + p_2)\lambda + (-p_1\lambda + p_3)\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + p_1 p_2 = 0, \tag{4}$$

其中

$$p_1 = \alpha > 0, \quad p_2 = -\frac{\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\alpha(\beta + \alpha\gamma)}{\beta(\beta - \alpha\gamma)} - \frac{h(\beta - \alpha\gamma)^2}{\alpha\beta}, \quad p_3 = \frac{\alpha(\beta - \alpha\gamma - 2\alpha)}{\beta - \alpha\gamma} > 0.$$

当$\tau=0$时，方程(4)即为

$$\lambda^2+p_2\lambda+p_1p_2+p_3=0. \tag{5}$$

当$p_2>0$时，则由Hurwitz判据可知方程(5)的两个根均具有负实部。

当$\tau>0$时，注意到$\mathrm{i}\,\omega(\omega>0)$是(4)的一个根当且仅当$\omega$满足

$$\omega^2-p_1p_2=-p_1\omega\sin\omega\tau+p_3\cos\omega\tau, \quad (p_1+p_2)\omega=p_1\omega\cos\omega\tau+p_3\sin\omega\tau. \tag{6}$$

对(6)两个方程分别平方再相加可得

$$\omega^4+p_2^2\omega^2+p_1^2p_2^2-p_3^2=0. \tag{7}$$

当$p_1p_2<p_3$，方程(7)仅有一个正根ω_0，其中

$$\omega_0=\Big[\frac{1}{2}\Big(-p_2^2+\sqrt{p_2^4-4\big(p_1^2p_2^2-p_3^2\big)}\ \Big)\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

令

$$\tau_j=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\Big(\frac{-p_1\omega_0^3+(p_1p_3+p_2p_3+p_1^2p_2)\omega_0}{p_1^2\omega_0^2+p_3^2}\Big)+\frac{2j\pi}{\omega_0}, \quad j=0,1,2,\cdots. \tag{9}$$

因此，当$\tau=\tau_j\,(j=0,1,\cdots)$时，$\lambda=\pm\mathrm{i}\,\omega_0$是方程(4)的一对共轭纯虚根。

由方程(4)两边同时对τ求导可得

$$\big[2\lambda+(p_1+p_2)-(p_1+\tau(-p_1\lambda+p_3))\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\big]\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau}(-p_1\lambda+p_3). \tag{10}$$

经计算，我们有

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\Big)^{-1}\Big|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}=\frac{2\omega_0^2+p_2^2}{p_1^2\omega_0^2+p_3^2}>0, \tag{11}$$

从而

$$\mathrm{sign}\Big\{\mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\Big)\Big|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}\Big\}=\mathrm{sign}\Big\{\mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\Big)^{-1}\Big|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_0}\Big\}>0.$$

根据文献[8]的第11章的定理1.1，可得以下结论。

定理2.1 令ω_0和$\tau_j\,(j=0,1,2,\cdots)$分别由(8)和(9)定义。如果$p_2>0$，$p_1p_2<p_3$，则有

(i) 当$\tau\in[0,\tau_0)$时，系统(3)的正平衡点E^*是渐近稳定的；

(ii) 当$\tau>\tau_0$时，系统(3)的正平衡点E^*不稳定；

(iii) 当$\tau=\tau_j\,(j=0,1,2,\cdots)$时，系统(3)在正平衡点$E^*$附近出现Hopf分支。

3 分支方向及分支周期解的存在性

在本节中，我们将用Hassard在文献[9]中所介绍的规范型方法及中心流形定理给出系统(3)的Hopf分支方向，并讨论分支周期解的稳定性。

令$t=s\tau$，$x(s\tau)=x_1(s)$，$y(s\tau)=y_1(s)$，$\tau=\tau_0+\mu$，$\mu\in R$，τ_0由(9)定义，且仍记$t=s$，则(3)等价于如下系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=(\tau_0+\mu)\Big(cx_1(t)-\dfrac{\alpha}{\beta}y_1(t)-x_1(t)^2-f(x_1,y_1)\Big),\\ \dot{y}_1(t)=(\tau_0+\mu)\big(\beta c_1x_1(t-1)+\alpha y_1(t-1)-\alpha y_1(t)+\beta f\big(x_1(t-1),y_1(t-1)\big)\big), \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$f(x,y)=\frac{x[-\gamma xy^*+y(1+\gamma x^*)]}{(1+\gamma x^*)^2(1+\gamma x^*+\gamma x)},$$
$$c_1=y^*/(1+\gamma x^*)^2,\quad c=1-2x^*-c_1, \tag{13}$$

对 $\phi=(\phi_1,\phi_2)^T\in C[-1,0]=C\big([-1,0],R^2\big)$，定义一个算子

$$L_\mu\phi=B\phi(0)+C\phi(-1), \tag{14}$$

其中

$$B=(\tau_0+\mu)\begin{pmatrix} c & -\alpha/\beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix},\quad C=(\tau_0+\mu)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta c_1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

且定义

$$f(\mu,\phi)=(\tau_0+\mu)\begin{pmatrix} -\phi_1^2(0)-f(\phi_1(0),\phi_2(0)) \\ \beta f(\phi_1(-1),\phi_2(-1)) \end{pmatrix},$$

其中 $f(\phi_1(0),\phi_2(0))$ 如 (13) 所定义。

于是，由 Riesz 表示定理，存在分量为有界变差函数的二阶矩阵 $\eta(\theta,\mu):[-1,0]\longrightarrow R^{2^2}$，使得对任意的 $\phi\in C[-1,0]$，有

$$L_\mu\phi=\int_{-1}^{0}\phi(\theta)\mathrm{d}\eta(\theta,\mu).$$

事实上，只需取 $\eta(\theta,\mu)=B\delta(\theta)-C\delta(\theta+1)$ 即可，其中 δ 为 Dirac-delta 函数。

对 $\phi\in C^1[-1,0]$，定义

$$A(\mu)\phi=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\phi(\theta)}{\mathrm{d}\theta}, & -1\le\theta<0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta(s,\mu)\phi(s), & \theta=0, \end{cases} \tag{15}$$

$$R(\mu)\phi=\begin{cases} 0, & -1\le\theta<0, \\ f(\mu,\phi), & \theta=0, \end{cases} \tag{16}$$

于是可把方程 (14) 写成如下形式

$$\dot{U}_t=A(\mu)U_t+R(\mu)U_t,\quad U=(x,y)^T. \tag{17}$$

对 $\psi\in C^1[0,1]$，定义

$$A^*\psi(s)=\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}\psi(s)}{\mathrm{d}s}, & 0<s\le 1, \\ \displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\eta^T(t,0)\psi(-t), & s=0, \end{cases} \tag{18}$$

对于 $\phi\in C\big([-1,0],C^2\big)$ 和 $\psi\in C\big([0,1],(C^2)^*\big)$，定义双线性积

$$\langle\phi,\psi\rangle=\bar{\psi}(0)\phi(0)-\int_{\theta=-1}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{\psi}(\xi-\theta)\mathrm{d}\eta(\theta)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{19}$$

其中$\eta(\theta) = \eta(\theta,0)$，$C^2$为复平面，那么算子$A = A(0)$与$A^*$是共轭算子。由第2节的讨论及变换$t = s\tau$可知$\pm \mathrm{i}\,\tau_0\omega_0$是算子$A(0)$的特征值，且其它特征值都具有严格负实部，从而$\pm \mathrm{i}\,\tau_0\omega_0$也是算子$A^*$的特征值。于是经过计算，可得下面的结论。

引理3.1 $q(\theta) = (1,\rho)^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_0\theta}$，$q^*(s) = D(1,\sigma)^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_0 s}$分别是$A(0)$和$A^*$关于$\mathrm{i}\omega_0\tau_0$，$-\mathrm{i}\omega_0\tau_0$的特征向量，而且满足$\langle q^*(s), q(\theta)\rangle = 1$，$\langle q^*(s), \bar{q}(\theta)\rangle = 0$，其中

$$\rho = \beta(c-\mathrm{i}\,\omega_0)/\alpha, \quad \sigma = -(c+\mathrm{i}\,\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_0\tau_0}/(\beta c_1), \quad D = (1+\bar{\rho}\sigma+\beta c_1\sigma+\alpha\sigma\bar{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0\tau_0})^{-1}.$$

以下，我们引用文献[7]中的一些概念，来计算中心流形C_0在$\mu = 0$时的坐标。令U_t是方程(17)当$\mu = 0$时的解，定义

$$z(t) = \langle q^*, U_t\rangle, \quad W(t,\theta) = U_t(\theta) - 2\mathrm{Re}z(t)q(\theta). \tag{20}$$

在中心流形C_0上，我们有$W(t,\theta) = W(z(t),\bar{z}(t),\theta)$，而且

$$W(z,\bar{z},\theta) = W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + \cdots, \tag{21}$$

z与$\bar{z}$是中心流形C_0在q^*和$\bar{q}^*$这两个方向上的局部坐标。如果U_t是实数，则W也是实数，我们仅考虑实数解的情况。既然$\mu = 0$时，解$U_t \in C_0$，则与文献[7]相同，有

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\omega_0\tau_0 z(t) + \bar{q}^*(0)f_0(z,\bar{z}). \tag{22}$$

再把(22)改写为

$$\dot{z}(t) = \mathrm{i}\,\omega_0\tau_0 z(t) + g(z,\bar{z}), \tag{23}$$

其中

$$g(z,\bar{z}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \cdots. \tag{24}$$

由(20)，我们有

$$U_t(\theta) = W(z,\bar{z},\theta) + zq(\theta) + \bar{z}\bar{q}(\theta).$$

注意到$q(\theta) = (1,\rho)^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau_0\theta}$，所以可得

$$\begin{pmatrix} u_{1t}(\theta) \\ u_{2t}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{(1)}(z,\bar{z},\theta) \\ W^{(2)}(z,\bar{z},\theta) \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_0\tau_0} + \bar{z}\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\rho} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\tau_0}.$$

因此

$$g(z,\bar{z}) = \bar{q}^* f_0(z,\bar{z}) = g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21}\frac{z^2\bar{z}}{2} + \cdots. \tag{25}$$

比较 (24) 和 (25) 的系数且注意到 (21)，可得

$$g_{20}=2\tau_0\bar{D}(\bar{\sigma}\beta\rho e^{-2i\omega_0\tau_0}),\quad g_{11}=2\tau_0\bar{D}\big(-1+\mathrm{Re}\,\rho(\bar{\sigma}\beta-1)\big),$$

$$g_{02}=2\tau_0\bar{D}(-\bar{\rho}+\bar{\sigma}\beta\rho e^{2i\omega_0\tau_0}-1),$$

$$\begin{aligned}g_{21}=2\tau_0\bar{D}\Big[&-6\bar{\sigma}\beta\rho\mathrm{Re}\{\rho\}x^*e^{-i\omega_0\tau_0}-W_{20}^{(1)}(0)-3\bar{\sigma}\beta\rho\bar{\rho}e^{-i\omega_0\tau_0}\\&+\bar{\sigma}\beta e^{i\omega_0\tau_0}\Big(\frac{1}{2}W_{20}^{(2)}(-1)+\rho^2x^*e^{-2i\omega_0\tau_0}-\rho x^*e^{-2i\omega_0\tau_0}\Big)\\&+\bar{\sigma}\beta e^{-i\omega_0\tau_0}\big(2\rho\bar{\rho}x^*-2x^*\mathrm{Re}\{\rho\}+W_{11}^{(2)}(-1)\big)+\bar{\sigma}\beta\rho W_{11}^{(1)}(-1)e^{-i\omega_0\tau_0}\\&+\frac{1}{2}\bar{\sigma}\beta\bar{\rho}W_{20}^{(1)}(-1)e^{i\omega_0\tau_0}-2W_{11}^{(1)}(0)+\rho\bar{\rho}x^*-\frac{1}{2}W_{20}^{(2)}(0)-\rho^2x^*\\&+2\rho x^*-W_{11}^{(2)}(0)+\bar{\rho}x^*-W_{11}^{(1)}(0)\rho-\frac{1}{2}\bar{\rho}W_{20}^{(1)}(0)+6\mathrm{Re}\{\rho\}\Big].\end{aligned}$$

现在我们计算 $W_{20}(\theta)$ 和 $W_{11}(\theta)$。根据 (17) 和 (20) 我们有

$$\begin{aligned}\dot{W}&=\dot{U}_t-\dot{z}q-z\dot{q}=\begin{cases}AW-2\mathrm{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}, & -1\le\theta<0,\\ AW-2\mathrm{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}+f_0, & \theta=0,\end{cases}\\&\overset{\mathrm{def}}{=}AW+H(z,\bar{z},\theta),\end{aligned}$$

其中

$$H(z,\bar{z},\theta)=H_{20}\frac{z^2}{2}+H_{11}z\bar{z}+H_{02}\frac{\bar{z}^2}{2}+\cdots. \tag{26}$$

当 $\theta\in[-1,0)$ 时，我们可以得到

$$(A-2i\,\omega_0\tau_0)W_{20}(\theta)=-H_{20}(\theta),\quad AW_{11}(\theta)=-H_{11}(\theta). \tag{27}$$

由于

$$H(z,\bar{z},\theta)=-2\mathrm{Re}\{\bar{q}^*(0)f_0q(\theta)\}=-gq(\theta)-\bar{g}\bar{q}(\theta), \tag{28}$$

比较 (28) 两边的系数可得

$$H_{20}(\theta)=-g_{20}q(\theta)-\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta),\quad H_{11}(\theta)=-g_{11}q(\theta)-\bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \tag{29}$$

另一方面，我们有

$$\dot{W}_{20}(\theta)=2i\,\omega_0\tau_0W_{20}(\theta)+g_{20}q(\theta)+\bar{g}_{02}\bar{q}(\theta). \tag{30}$$

注意到 $q(\theta)=(1,\rho)^Te^{i\omega_0\tau_0}$，因此

$$W_{20}(\theta)=\frac{ig_{20}}{\omega_0\tau_0}q(0)e^{i\omega_0\tau_0\theta}+\frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\tau_0\theta}+E_1e^{2i\omega_0\tau_0\theta}. \tag{31}$$

类似可证

$$W_{11}(\theta)=-\frac{ig_{11}}{\omega_0\tau_0}q(0)e^{i\omega_0\tau_0\theta}+\frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0\tau_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\tau_0\theta}+E_2, \tag{32}$$

其中 E_1, E_2 的值可由 $\theta=0$ 时 H 的值来确定。由 A 的定义和 (27) 可得

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{d}\eta(\theta)W_{20}(\theta) = 2\mathrm{i}\,\omega_0\tau_0 W_{20}(0) - H_{20}(0), \quad \int_{-1}^{0} \mathrm{d}\eta(\theta)W_{11}(\theta) = -H_{11}(0), \tag{33}$$

这里 $\eta(\theta)=\eta(0,\theta)$。根据 H 的定义，我们有

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{02}\bar{q}(0) + \tau_0 A_1, \quad H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + \tau_0 A_2,$$

其中

$$A_1 = \big(-2-2\rho,\, 2\beta\rho\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0\tau_0}\big)^T, \quad A_2 = \big(-2-2\mathrm{Re}\{\rho\},\, 2\beta\mathrm{Re}\{\rho\}\big)^T. \tag{34}$$

我们将 (31) 和 (34) 代入到 (33)，由此解得

$$E_1 = \frac{1}{\Delta_1}(\Delta_1^1,\, \Delta_1^2)^T,$$

其中

$$\Delta_1 = -4\omega_0^2 - c\alpha + 2(\alpha - c)\omega_0\mathrm{i} + (c + c_1 - 2\mathrm{i}\omega_0)\alpha\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0\tau_0},$$

$$\Delta_1^1 = -2\alpha(1+\rho) - 4\omega_0(1+\rho)\mathrm{i} + 2\alpha\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0\tau_0},$$

$$\Delta_1^2 = 2\beta\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_0\tau_0}\big(2\rho\omega_0\mathrm{i} - c\rho - (1+\rho)c_1\big),$$

同理可求出

$$E_2 = \frac{1}{\Delta_2}(\Delta_2^1,\, \Delta_2^2)^T,$$

其中

$$\Delta_2 = \alpha c_1, \quad \Delta_2^1 = -2\alpha\mathrm{Re}\{\rho\}, \quad \Delta_2^2 = 2\beta\mathrm{Re}\{\rho\}(c_1 - c) + 2\beta c_1.$$

通过上面的分析，我们可解出 $W_{20}(\theta)$ 和 $W_{11}(\theta)$。更进一步，我们可以求出 g_{21}，那么 (25) 中的 g_{ij} 就完全可以由系统 (12) 的系数表出了。于是，由文献 [10] 中的一般性定理可以计算出下列数值

$$C_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\omega_0\tau_0}\Big(g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\Big) + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\mathrm{Re}\{C_1(0)\}}{\mathrm{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \quad \beta_2 = 2\mathrm{Re}\{C_1(0)\}, \tag{35}$$

$$T_2 = -\frac{\mathrm{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2\mathrm{Im}\{\lambda'(\tau_0)\}}{\omega_0\tau_0}.$$

由 (35) 中 $C_1(0)$ 的表达式，易得出 μ_2, β_2, T_2 的值。另一方面，我们知道 μ_2 决定了 Hopf 分支的方向，如果 $\mu_2 > 0\,(< 0)$，则 Hopf 分支是超临界 (亚临界) 的。当 $\tau > \tau_0\,(< \tau_0)$ 时，Hopf 分支的周期解存在；β_2 决定了分支周期解的稳定性：当 $\beta_2 < 0\,(> 0)$ 分支周期解是稳定的 (不稳定的)；T_2 决定了分支周期解的周期：如果 $T_2 > 0\,(< 0)$ 周期是增加 (减少) 的。

4　数值模拟

本节选取 $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=1.5$, $h=0.1$，则系统(3)变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x(t)-x^2(t)-\dfrac{x(t)y(t)}{1+\frac{3}{2}x(t)}-\dfrac{1}{10}, \\ \dot{y}(t)=\dfrac{4x(t-\tau)y(t-\tau)}{1+\frac{3}{2}x(t-\tau)}-y(t), \end{cases} \tag{36}$$

计算可得

$$\tau_0\approx 0.0986,\quad C_1(0)\approx -0.4212+0.2714\,\mathrm{i}.$$

当 $\tau=\tau_0$ 时，$\beta_2<0$，周期解是稳定的；$\mu_2=5.1024>0$，Hopf分支是超临界的；$T_2=1.7460>0$，周期是递增的。当 $\tau<\tau_0$ 时系统(36)的正平衡点是渐近稳定的，如图1；当 $\tau>\tau_0$ 时系统(3)的正平衡点是不稳定的，如图2。

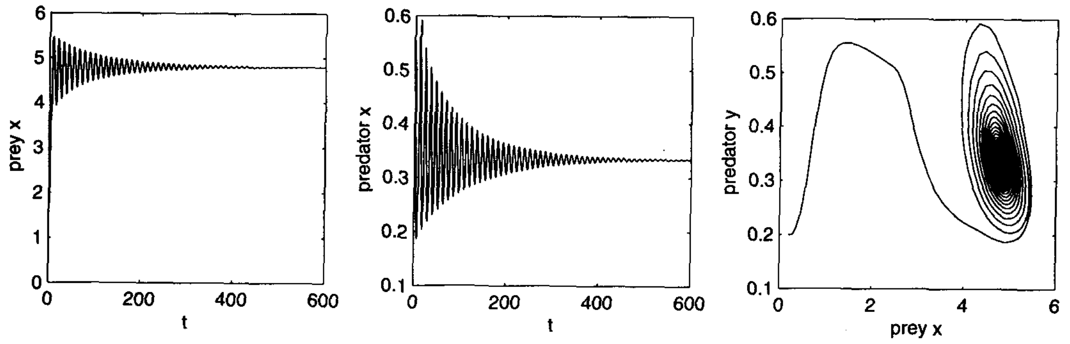

图1:　取 $\tau=0.02<\tau_0$，正平衡点局部渐近稳定

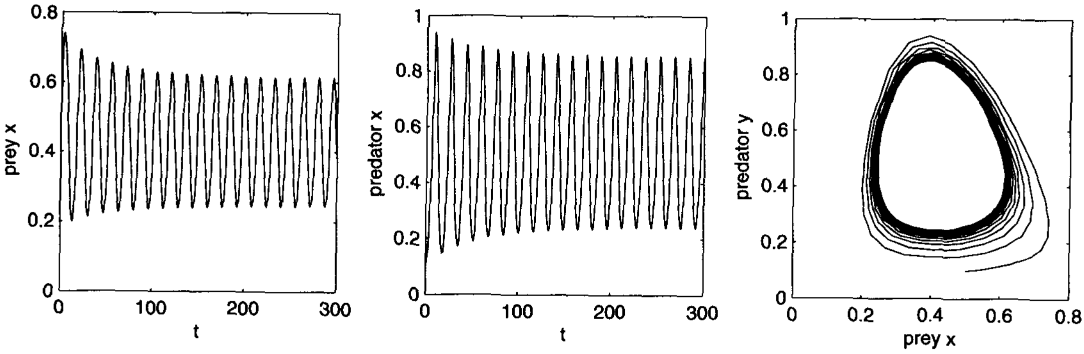

图2:　取 $\tau=0.15>\tau_0$，正平衡点不稳定

参考文献:

[1] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥：安徽教育出版社，1996
Ma Z E. Mathematical Modeling and Research in Ecology[M]. Hefei: Anhui Educational Publishing House, 1996

[2] 刘宣亮，戴国仁. 一个食饵种群具有常数收获率和具有III类功能性反应系统的定性分析[J]. 生物数学学报，1997, 12(3): 213-222
Liu X L, Dai G R. Qualitative analysis for a predator-prey system with constant-rate prey harvesting under type-III functional response[J]. Journal of Biomathematics, 1997, 12(3): 213-222

[3] 戴国仁，徐长醒. 捕食者种群具有常数收获率和具有Holling I类功能性反应的捕食系统[J]. 数学物理学报，1994, 14(2): 134-144
Dai G R, Xu C X. A predator-prey system with constant-rate prey harvesting under type-I functional response[J]. Acta Mathematica Scientia, 1994, 14(2): 134-144

[4] Lou J, Wang X W, Lou M Z. Two differential equation models about AIDS-related cancer[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(5): 779-787

[5] 邱亚林. 具有时滞的细胞神经网络吸引集与周期解存在性[J]. 工程数学学报，2008, 25(2): 211-218
Qiu Y L. Existence of attracting sets and periodic solution for cellular neural networks with delays[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(2): 211-218

[6] Martin A, Ruan S. Predator-prey models with delay and prey harvesting[J]. J Math Biol, 2001, 43: 247-267

[7] Cooke K, Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches[J]. J Math Anal Appl, 1982, 86: 592-627

[8] Hale J, Lunel S. Introduction to Functional Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993

[9] Hassard B, Kazarinoff D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1981

Stability and Hopf Bifurcation of a Predator-prey Model with Time Delay and Harvesting

TIAN Xiao-hong, XU Rui, WANG Li-li

(Institute of Applied Mathematics, Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003)

Abstract: A predator-prey model with harvesting and a time delay describing the gestation period of the predator is considered. We investigate the local stability of a positive equilibrium by analyzing the corresponding characteristic equation. It is proved that when the time delay τ increases, the positive equilibrium looses its stability and a Hopf bifurcation occurs when τ passes through a critical value. Formula are derived to determine the direction of bifurcations and the stability of bifurcating periodic solutions by using the normal form theory and the center manifold theorem. Numerical simulations are carried out to illustrate theoretical results.

Keywords: predator-prey system; time delay; functional response; Hopf bifurcation; stability

Received: 04 Nov 2008. **Accepted:** 29 Apr 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671209).